• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{2}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{2}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=1$.

c) f est continue et strictement décroissante sur $\mathbf{R}$ donc f réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $f(\mathbf{R})=]1,+\infty[$.

4°/ $f^{-1}:]1,+\infty[\to\mathbf{R}$

$x\mapsto f^{-1}(x)=y$.

$f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x \Leftrightarrow -\frac{y}{2}+1+\frac{1}{2}\sqrt{y^2+1}=x \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}\sqrt{y^2+1}=x-1+\frac{y}{2} \Rightarrow \frac{y^2+1}{4}=(x-1)^2+(x-1)\cdot y+\frac{y^2}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=\frac{1}{4(x-1)}+1-x$.

Conclusion : $\forall x\in]1,+\infty[,\ f^{-1}(x)=\frac{1}{4(x-1)}+1-x$.

Solution 14 :

1°/a) • La fonction $x\mapsto 2x-x^2$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et

$\forall x\in]0,2[,\ 2x-x^2>0$ donc f est dérivable sur $]0,2[$.

• Dérivabilité de f à droite en 0 :

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{2x-x^2}}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to0^+}\sqrt{\frac{2x-x^2}{x^2}}$$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{\frac{2}{x}-1}=+\infty$ donc f n'est pas dérivable à droite en 0.

• Dérivabilité de f à gauche en 2 :

$$\lim_{x\to2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x-2}$$